INTEGRALI PO VIŠEDIMENZIONIM OBLASTIMA I SVOĐENJE NA VIŠESTRUKE (ITERIRANE) INTEGRALE

§ 1. Dvojni i trojni integrali

3460. Tanka pločica (njena se debljina zanemaruje) leži u ravni xOy i zauzima oblast D; gustina pločice je funkcija tačke: $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y)$. Naći masu pločice.

3461. Po pločici iz prethodnog zadatka raspodeljena je izvesna količina elektriciteta čija je površinska gustina $\sigma = \sigma(P) = \sigma(x, y)$; izraziti tu količinu pomoću dvojnog integrala.

3462. Pločica iz zadatka 3460 obrće se oko x-ose ugaonom brzinom ω; izraziti kinetičku energiju pločice.

3463. Specifična toplota pločice iz zadatka 3460 menja se po zakonu $c = c(P) = c(x, y)$; naći količinu toplote koju pločica primi pri zagrevanju od temperature t_1 do temperature t_2.

3464. Telo zauzima prostornu oblast Ω; njegova je gustina funkcija tačke: $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y, z)$. Naći masu tela.

3465. U telu iz prethodnog zadatka neravnomerno je raspodeljena izvesna količina elektriciteta čija je gustina funkcija tačke: $\delta = \delta(P) = \delta(x, y, z)$; naći ukupno električno opterećenje tela.

U zadacima 3466 — 3476 proceniti date integrale.

3466. $\iint\limits_D (x + y + 10)\, d\sigma$, gde je D—krug $x^2 + y^2 < 4$.

3467. $\iint\limits_D (x^2 + 4y^2 + 9)\, d\sigma$, gde je D—krug $x^2 + y^2 < 4$.

3468. $\iint\limits_D (x + y + 1)\, d\sigma$, gde je D—pravougaonik $0 < x < 1$, $0 < y < 2$.

3469. $\iint\limits_D (x + xy - x^2 - y^2)\, d\sigma$, gde je D—pravougaonik $0 < x < 1$, $0 < y < 2$.

3470. $\iint\limits_D xy(x+y)\,d\sigma$, gde je D—kvadrat $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3471. $\iint\limits_D (x+1)^y\,d\sigma$, gde je D—kvadrat $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3472. $\iint\limits_D (x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}+2)\,d\sigma$, gde je D—kvadrat $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3473. $\iint\limits_D (x^2+y^2-4x-4y+10)\,d\sigma$, gde je D—oblast ograničena elipsom $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$ (uključujući granicu).

3474. $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dv$, gde je Ω—lopta $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$.

3475. $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dv$, gde je Ω—lopta $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $x \leqslant 3$, $y \leqslant 3$, $z \leqslant 3$.

3476. $\iiint\limits_\Omega (x+y-z+10)\,dv$, gde je Ω—lopta $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3$.

§ 2. Svođenje na višestruke integrale

Dvojni integral. Pravougaona oblast

U zadacima 3477 — 3484 izračunati date dvojne integrale po pravougaonim oblastima D koje su određene nejednakostima navedenim u zadacima.

3477. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2)$.

3478. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3479. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3480. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3481. $\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3482. $\iint\limits_D x\sin(x+y)\,dx\,dy \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

3483. $\iint\limits_D x^2 ye^{xy}\,dx\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 < y < 2).$

3484. $\iint\limits_D x^2 y\cos(xy^2)\,dx\,dy \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2},\ 0 < y < 2\right)$

Dvojni integral. Proizvoljna oblast

U zadacima 3485 — 3497 naći granice dvostrukog integrala na koji se svodi dvojni integral $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ za date (konačne) oblasti integracije D.

3485. Paralelogram koji obrazuju prave

$$x=3,\quad x=5,\quad 3x-2y+4=0,\quad 3x-2y+1=0.$$

3486. Trougao koji obrazuju prave $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

3487. $x^2+y^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$

3488. $x+y \leqslant 1, \quad x-y \leqslant 1, \quad x \geqslant 0.$

3489. $y \geqslant x^2 \quad y \leqslant 4-x^2.$

3490. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leqslant 1.$ **3491.** $(x-2)^2+(y-3)^2 \leqslant 4.$

3492. Oblast D je ograničena parabolama $y=x^2$ i $y=\sqrt{x}$.

3493. Trougao koji obrazuju prave $y=x$, $y=2x$ i $x+y=6$.

3494. Paralelogram koji obrazuju prave

$$y=x,\quad y=x+3,\quad y=-2x+1,\quad y=-2x+5.$$

3495. $y-2x \leqslant 0, \quad 2y-x \geqslant 0, \quad xy \leqslant 2.$

3496. $y^2 \leqslant 8x, \quad y \leqslant 2x, \quad y+4x-24 \leqslant 0.$

3497. Oblast D je ograničena hiperbolom $y^2-x^2=1$ i krugom $x^2+y^2=9$ (misli se na onu oblast u kojoj leži koordinatni početak).

U zadacima 3498 — 3503 promeniti redosled integracije u datim integralima.

3498. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$ **3499.** $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$

3500. $\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y)\,dy.$

3501. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy.$

3502. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x, y)\, dy.$ **3503.** $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x, y)\, dy.$

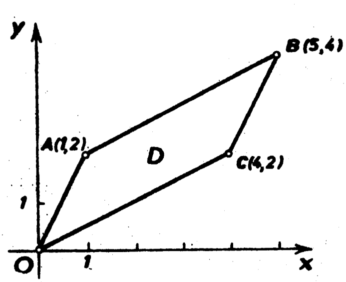
3504. Izmenivši redosled integracije predstaviti dati izraz u obliku jednog dvostrukog integrala:

1) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)\, dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x, y)\, dy;$

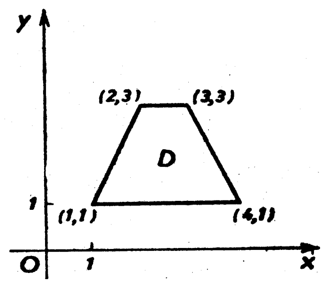
2) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x, y)\, dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y)\, dy;$

3) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^{\frac{2}{3}}} f(x, y)\, dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y)\, dy.$

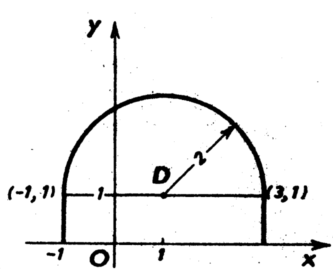
3505. Predstaviti dvojni integral $\iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy$ po oblastima D prikazanim na sl. 62, 63, 64, 65, — u obliku zbira dvostrukih integrala (sa naj-



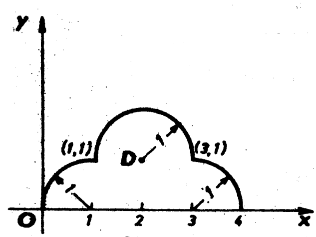
Sl. 62



Sl. 63



Sl. 64



Sl. 65

manjim brojem sabiraka). Granične linije oblasti prikazanih na sl. 64 i 65 sastoje se iz pravolinijskih odsečaka i kružnih lukova.

U zadacima 3506 — 3512 izračunati date integrale:

3506. 1) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy$; 2) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x} dy$; 3) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$.

3507. $\iint\limits_D x^3 y^2 \, dx \, dy$, D—krug $x^2+y^2<R^2$.

3508. $\iint\limits_D (x^2+y) \, dx \, dy$, oblast D je ograničena parabolama $y=x^2$ i $y^2=x$.

3509. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy$, oblast D je ograničena pravama $x=2$, $y=x$ i hiperbolom $xy=1$.

3510. $\iint\limits_D \cos(x+y) \, dx \, dy$, oblast D je ograničena pravama $x=0$, $y=\pi$ i $y=x$.

3511. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}$ oblast D je četvrtina kruga $x^2+y^2<1$, koji leži u prvom kvadrantu.

3512. $\iint\limits_D x^2 y^2 \sqrt{1-x^3-y^3} \, dx \, dy$, oblast D je ograničena krivom $x^3+y^3=1$ i koordinatnim osama.

3513. Naći srednju vrednost funkcije $z=12-2x-3y$ u oblasti ograničenoj pravama $12-2x-3y=0$, $x=0$, $y=0$.

3514. Naći srednju vrednost funkcije $z=2x+y$ u oblasi ograničenoj pravom $x+y=3$ i koordinatnim osama.

3515. Naći srednju vrednost funkcije $z=x+6y$ u oblasti ograničenoj pravama $y=x$, $y=5x$ i $x=1$.

3516. Naći srednju vrednost funkcije $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ u krugu $x^2+y^2<R^2$.

Trojni integral

U zadacima 3517 — 3524 izračunati navedene trostruke i trojne integrale

3517. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dz$. **3518.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c (x+y+z) \, dz$.

3519. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dx \int\limits_0^y xyz \, dz$. **3520.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3 y^2 z \, dz$.

3521. $\int\limits_0^{e-1} dx \int\limits_0^{e-x-1} dy \int\limits_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\, dz.$

3522. $\iiint\limits_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, Ω je oblast ograničena ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

3523. $\iiint\limits_\Omega xy\,dx\,dy\,dz$, Ω je oblast ograničena hiperboličnim paraboloidom $z=xy$ i ravnima $x+y=1$ i $z=0$ $(z>0)$.

3524. $\iiint\limits_\Omega y\cos(z+x)\,dx\,dy\,ds$, Ω je oblast ograničena cilindrom $y=\sqrt{x}$ i ravnima $y=0$, $z=0$ i $x+z=\frac{\pi}{2}$.

§ 3. Integrali u polarnim, cilindričnim i sfernim koordinatama

Dvojni integral

U zadacima 3525 — 3531 transformisati dvojni integral $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ na polarne koordinate ρ i φ ($x=\rho\cos\varphi$. $y=\rho\sin\varphi$), a zatim ga svesti na dvostvruki (sa određenim posebnim granicama integracije).

3525. D je krug: 1) $x^2+y^2<R^2$; 2) $x^2+y^2<ax$; 3) $x^2+y^2<by$.

3526. D je oblast ograničena kružnim linijama $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$ i pravama $y=x$ i $y=2x$.

3527. D je oblast koja predstavlja zajednički deo dva kruga $x^2+y^2<ax$ i $x^2+y^2<by$.

3528. D je oblast ograničena pravama $y=x$, $y=0$ i $x=1$.

3529. D je odsečak koji prava $x+y=2$ odseca od kruga $x^2+y^2=4$.

3530. D je oblast ograničena desnom petljom lemniskate $(x^2+y^2)^2=$ $=a^2(x^2-y^2)$.

3531. D je oblast određena nejednakostima $x>0$, $y\geqslant 0$, $(x^2+y^2)^3<$ $<4a^2x^2y^2$.

U zadacima 3532 — 3535 date dvostruke integrale transformisati na polarne koordinate.

3532. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\,dy.$ **3533.** $\int\limits_{\frac{R}{2}}^{2R} dy \int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3534. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy.$

3535. $\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int\limits_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \int\limits_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

U zadacima 3536 — 3540 izračunati date dvojne integrale prelazeći na polarne koordinate.

3536. $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$, oblast D je četvrtina kruga $x^2+y^2<R^2$ koja leži u prvom kvadrantu.

3537. $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, oblast D je određena nejednakostima $x^2+y^2<1$, $x>0$, $y>0$.

3538. $\iint\limits_D (h-2x-3y)\,dx\,dy$, D je krug $x^2+y^2<R^2$.

3539. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2 \quad y^2}\,dx\,dy$, D je krug $x^2+y^2<Rx$.

3540. $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, D je deo prstena $x^2+y^2>1$, $x^2+y^2<9$, $y\geqslant\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y<x\sqrt{3}$.

3541. Na osnovu geometrijskih razmatranja pokazati da: ako se dekartove kordinate transformišu shodno obrascima $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, u kojima su a i b konstante, onda će elemenat površine biti $d\sigma=ab\rho\,d\rho\,d\varphi$.

U zadacima 3542 — 3544 koristeći rezultat prethodnog zadatka i izabravši najpogodnije vrednosti za a i b, transformisati dvojne integrale.

3542. $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$. D je oblast ograničena elipsom $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

3543. $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$. D je oblast ograničena krivom $\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^2=x^2y$.

3544. $\iint\limits_D f\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dx\,dy$, D je deo eliptičnog prstena ograničenog elipsama $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ i $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$, koji leži u prvom kvadrantu.

3545. Izračunati integral $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, u kojem je D oblast u prvom kvadrantu, cgraničena elipsom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3546. Izračunati integral $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, u kojem je D oblast u prvom kvadrantu, cgraničena krivom $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{b}\right)^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$.

Trojni integral

U zadacima 3547 — 3551 transformisati trojni integral $\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ na cilindrične koordinate ρ, φ, z ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi, z=z$), ili na sferne kordinate ρ, θ, φ ($x=\rho\cos\varphi\cdot\sin\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\theta$), a zatim ga svesti na trostruki (sa određenim posebnim granicama integracije).

3547. Ω je oblast u prvom oktantu ograničena cilindrom $x^2+y^2=R^2$ i ravnima $z=0$, $z=1$, $y=x$ i $y=x\sqrt{3}$.

3548. Ω je oblast ograničena cilindrom $x^2+y^2=2x$, ravni $s=0$ i paraboloidom $z=x^2+y^2$.

3549. Ω je deo lopte $x^2+y^2+z^2<R^2$ koji leži u prvom oktantu.

3550. Ω je deo lopte $x^2+y^2+z^2<R^2$ koji leži unutar cilindra $(x^2+y^2)^2=$ $=R^2(x^2-y^2)$ $(x>0)$.

3551. Ω je oblast koja predstavlja zajednički deo dve lopte $x^2+y^2+z^2<R^2$ i $x^2+y^2+(z-R)^2<R^2$.

U zadacima 3552 — 3556 izračunati date integrale prelazeći na cilindrične ili sferne koordinate.

3552. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz$.

3553. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$.

3554. $\int\limits_{-R}^{-R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,zd$.

3555. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$.

3556. $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$. gde je oblast Ω određena nejednakostima $z \geqslant 0$, $r^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$.

3557. $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, gde je Ω—lopta $x^2+y^2+z^2<1$.

3558. $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, gde je Ω—cilindar $x^2+y^2<1$, $-1<z<1$.

§ 4. Primena dvojnih i trojnih integrala

Zapremina tela. I

U zadacima 3559 — 3596 pomoću dvojnih integrala naći zapremine tela ograničenih datim površima (parametre koji ulaze u uslove zadatka smatrati pozitivnim veličinama).

3559. Koordinatnim ravnima, ravnima $x=4$ i $y=4$ i obrtnim paraboloidom $z=x^2+y^2+1$.

3560. Koordinatnim ravnima, ravnima $x=a$, $y=b$ i eliptičnim paraboloidom $z=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}$.

3561. Ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (piramida).

3562. Ravnima $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$ i $x+y+z=6$.

3563. Obrtnim paraboloidom $z=x^2+y^2$, koordinatnim ravnima i ravni $x+y=1$.

3564. Obrtnim paraboloidom $z=x^2+y^2$ i ravnima $z=0$, $y=1$, $y=2x$ i $y=6-x$.

3565. Cilindrima $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ i ravnima $z=0$ i $x+z=6$.

3566. Cilindrom $z=\dfrac{1}{2}y^2$ i ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $2x+3y-12=0$.

3567. Cilindrom $z=9-y^2$, koordinatnim ravnima i ravni $3x+4y=12$ $(y \geqslant 0)$.

3568. Cilindrom $z=4-x^2$, koordinatnim ravnima i ravni $2x+y=4$ $(x \geqslant 0)$.

3569. Cilindrom $2y^2=x$ i ravnima $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1$ i $z=0$.

3570. Kružnim cilindrom poluprečnika r, čija se osa poklapa sa ordinatnom osom, koordinatnim ravnima i ravni $\dfrac{x}{r}+\dfrac{y}{a}=1$.

3571. Eliptičnim cilindorom $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ i ravnima $z=12-3x-4y$ i $z=1$.

3572. Cilindrima $x^2+y^2=R^2$ i $x^2+z^2=R^2$.

3573. Cilindrima $z=4-y^2$, $y=\frac{x^2}{2}$ i ravni $z=0$.

3574. Cilindrima $x^2+y^2=R^2$, $z=\frac{x^3}{a^2}$ i ravni $z=0$ $(x\geqslant 0)$.

3575. Hiperboličnim paraboloidom $z=x^2-y^2$ i ravnima $z=0$ i $x=3$.

3576. Hiperboličnim paraboloidom $z=xy$, cilindrom $y=\sqrt{x}$ i ravnima $x+y=2$, $y=0$ i $z=0$.

3577. Paraboloidom $z=x^2+y^2$, cilindrom $y=x^2$ i ravnima $y=1$ i $z=0$.

3578. Eliptičnim cilindrom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ i ravnima $y=\frac{b}{a}x$, $y=0$ i $z=0$ $(x>0)$.

3579. Paraboloidom $z=\frac{a^2-x^2-4y^2}{a}$ i ravni $z=0$.

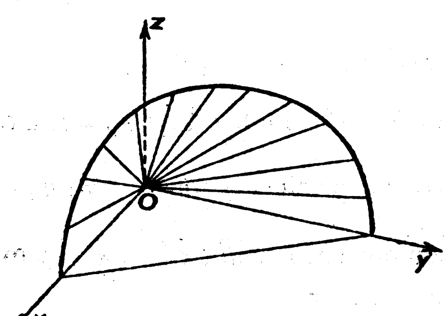
3580. Cilindrima $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $z=e^2-y^2$ i ravni $z=0$.

3581. Cilindrima $y=\ln x$ i $z=\ln^2 x$ i ravnima $z=0$ i $y+z=1$.

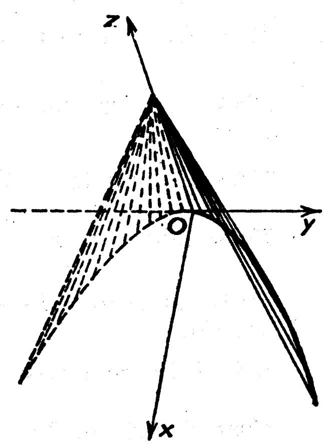
3582*. Cilindrima $z=\ln x$ i $z=\ln y$ i ravnima $z=0$ i $x+y=2e$ $(x>1)$.

3583. Cilindrima $y=x+\sin x$, $y=x-\sin x$ i $z=\frac{(x+y)^2}{4}$ (parabolički cilindar čije su izvodnice paralelne pravoj $x-y=0$, $z=0$) i ravni $z=0$ $(0<x\leqslant<\pi,\ y>0)$.

3584. Konusnom površinom $z^2=xy$ (sl. 66), cilindrom $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ i ravni $z=0$.



Sl. 66



Sl. 67

3585. Konusnom površinom $4y^2=x(2-z)$ (parabolični konus, sl. 67) i ravnima $z=0$ i $x+z=2$.

3586. Površinom $z=\cos x\cdot\cos y$ i ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $x+y=\frac{\pi}{2}$.

3587. Cilindrom $x^2+y^2=4$ i ravnima $z=0$ i $z=x+y+10$.

3588. Cilindrom $x^2+y^2=2x$ i ravnima $2x-z=0$ i $4x-z=0$.

3589. Cilindrom $x^2+y^2=R^2$, paraboloidom $Rz=2R^2+x^2+y^2$ i ravni $z=0$.

3590. Cilindrom $x^2+y^2=2ax$, paraboloidom $z=\frac{x^2+y^2}{a}$ i ravni $z=0$.

3591. Sferom $x^2+y^2+z^2=a^2$ i cilindrom $x^2+y^2=ax$ (Vivijanijev problem).

3592. Hiperboličkim paraboloidom $z=\frac{xy}{a}$, cilindrom $x^2+y^2=ax$ i ravni $z=0$ $(x>0,\ y>0)$.

3593. Cilindrima $x^2+y^2=x$ i $x^2+y^2=2x$, paraboloidom $z=x^2+y^2$ i ravnima $x+y=0$, $x-y=0$ i $z=0$.

3594. Cilindrima $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$ i ravnima $z=x+2y$ i $z=0$.

3595. Konusnom površinom $z^2=xy$ i cilindrom $(x^2+y^2)^2=2xy$ $(x>0,\ y>0,\ z\geqslant 0)$.

3596. Helikoidom („spiralne lestvice") $z=h\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, cilindrom $x^2+y^2=R^2$ i ravnima $x=0$ i $z=0$ $(x>0,\ y\geqslant 0)$.

Površina ravne oblasti

U zadacima 3597 — 3608 pomoću dvojnih integrala naći površine navedenih oblasti.

3597. Oblasti ograničene pravama $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

3598. Oblasti ograničene pravama $y=x$, $y=5x$, $x=1$.

3599. Oblasti ograničene elipsom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3600. Oblasti ograničene parabolom $y^2=\frac{b^2}{a}x$ i pravom $y=\frac{b}{a}x$.

3601. Oblasti ograničene parabolama $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ i pravom $x=4$.

3602*. Oblasti ograničene krivom $(x^2+y^2)^2=2ax^3$

3603. Oblasti ograničene krivom $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$.

3604. Oblasti ograničene krivom $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (Bernulijeva lemniskata).

3605. Oblasti ograničene petljom krive $x^3+y^3=2xy$ koja leži u prvom kvadrantu.

3606. Oblasti ograničene petljom krive $(x+y)^3=xy$ koja leži u prvom kvadrantu.

3607. Oblasti ograničene petljom krive $(x+y)^5=x^2y^2$ koja leži u prvom kvadrantu.

3608. Oblasti ograničene linijom

1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$; 2) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{25}$;

Zapremina tela. II

U zadacima 3609 — 3625 pomoću trojnih integrala izračunati zapremine tela ograničenih datim površinama (parametre koji ulaze u uslove zadatka smatrati pozitivnim veličinama).

2609. Cilindrima $z=4-y^2$ i $z=y^2+2$ i ravnima $x=-1$ i $x=2$.

3610. Paraboloidima $z=x^2+y^2$ i $z=x^2+2y^2$ i ravnima $y=x$, $y=2x$ i $x=1$.

3611. Paraboloidima $z=x^2+y^2$ i $z=2x^2+2y^2$, cilindrom $y=x^2$ i ravni $y=x$.

3612. Cilindrima $z=\ln(x+2)$ i $z=\ln(6-x)$ i ravnima $x=0$, $x+y=2$ i $x-y=2$.

3613*. Paraboloidom $(x-1)^2+y^2=z$ i ravni $2x+z=2$.

3614*. Paraboloidom $z=x^2+y^2$ i ravni $z=x+y$.

3615*. Sferom $x^2+y^2+z^2=4$ i paraboloidom $x^2+y^2=3z$.

3616. Sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$ i paraboloidom $x^2+y^2=R(R-2z)$ $(z\geqslant 0)$.

3617. Paraboloidom $z=x^2+y^2$ i konusom $z^2=xy$.

3618. Sferom $x^2+y^2+z^2=4Rz-3R^2$ i konusom $z^2=4(x^2+y^2)$ (misli se na deo loptine zapremine koji leži unutar konusa).

3619*. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$.

3620. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$.

3621. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4$. **3622.** $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$,

3623. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2(x^2+y^2)^2$.

3624. $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3z$.

3625. $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$, $z^2=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x>0,\ y>0,\ z\geqslant 0)$.

Površina površi

3626. Izračunati površinu onog dela ravni $6x+3y+2z=12$ koji leži u prvom oktantu.

3627. Izračuuati površinu onog dela površi $z^2=2xy$ koji se projektuje na pravougaonik u ravni $z=0$, ograničen pravama $x=0$. $y=0$, $x=3$, $y=6$.

3628. Naći površinu onog dela konusa $z^2 = x^2 + y^2$ koji leži između koordinatne ravni Oxy i ravni $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

U zadacima 3629 — 3639 naći površine nazn... delova datih površi.

3629. Dela $z^2 = x^2 + y^2$ isečenog cilindrom $z^2 = 2py$.

3630*. Dela $y^2 + z^2 = x^2$, koji leži unatar cilindra $x^2 + y^2 = R^2$.

3631. Dela $y^2 + z^2 = x^2$, koji isecaju cilindar $x^2 - y^2 = a^2$ i ravni $y = b$ i $y = -b$.

3632. Dela $z^2 = 4x$, koji isecaju cilindar $y^2 = 4x$ i ravan $x = 1$.

3633. Dela $z = xy$, isečenog cilindrom $x^2 + y^2 = R^2$.

3634. Dela $2z = x^2 + y^2$, isečenog cilindrom $x^2 + y^2 = 1$.

3635. Dela $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, isečenog cilindrom $x^2 + y^2 = R^2$ $(R < a)$.

3636. Dela $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, isečenog cilindrom $x^2 + y^2 = Rx$.

2637. Dela $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, koga iseca „lemniskatni" cilindar $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$.

3638. Dela $z = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$ koji leži u prvom oktantu i isečen je cilindrima $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 4$.

3639. Dela $(x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 + z^2 = a^2$, koji leži u prvom oktantu $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

3640*. Izračunati površinu dela zemljine kugle (smatrajući zemlju loptom poluprečnika $R \approx 6400\,km$) ograničenog meridijanima $\varphi = 30°$ i $\varphi = 60°$, i uporednicima $\theta = 45°$ i $\theta = 60°$.

3641. Izračunati ukupnu površinu tela ograničenog sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ i paraboloidom $x^2 + y^2 = 2az$ $(z > 0)$.

3642. Ose dva istovetna cilindra poluprečnika R seku se pod pravim uglom; naći površinu onog dela jednog cilindra koji leži u drugom cilindru.

Momenti i težište

U zadacima 3643 — 3646 pomoću dvojnog integrala naći statičke momente datih homogenih ravnih figura (gustina $\gamma = 1$).

3643. Pravougaonika čije su stranice a i b — u odnosu na stranicu a.

3644. Polukruga u odnosu na prečnik.

3645. Kruga u odnosu na tangentu.

3646. Pravilnog šestougla u odnosu na stranicu.

3647. Dokazati da statički momenat trougla čija je osnovica a, u odnosu na tu osnovicu, zavisi samo od visine trougla.

U zadacima 3648 — 3652 pomoću dvojnih integrala odredite težište datih homogenih ravnih oblasti.

3648. Oblasti ograničene polovinom elipse i njenom velikom osom.

3649. Oblasti ograničene lukom sinusoide $y=\sin x$, x-osom i odsečkom prave $x=\frac{\pi}{4}$.

3650. Kružnog isečka koji odgovara centralnom uglu α (poluprečnik kruga je R).

3651. Kružnog odsečka koji odgovara centralnom uglu α (poluprečnik kruga je R).

3652. Oblasti ograničene zatvorenom krivom $y^2=x^2-x^4$ $(x>0)$.

U zadacima 3653 — 3659 naći momente inercije datih homogenih ravnih figura (gustina $\gamma=1$).

3653. Kruga poluprečnika R u odnosu na tangentu.

3654. Kvadrata stranice a u odnosu na teme.

3655. Elipse u odnosu na centar.

3656. Pravougaonika čije su stranice a i b, u odnosu na tačku preseka dijagonala.

3657. Jednokrakog trougla osnovice a i visine h u odnosu na teme.

3658. Kruga poluprečnika R u odnosu na tačku kružne linije.

3659. Paraboličnog odsečka čija je osnovica normalna na osu parabole, u odnosu na teme parabole (osnovica odsečka je a, a „visina" je h).

3660. Dokazati da je moment inercije kružnog prstena u odnosu na centar dva puta veći od momenta inercije u odnosu na bilo koju osu koja prolazi kroz centar prstena (i leži u njegovoj ravni).

3661. Dokazati da zbir momenata inercije ravne figure F u odnosu na bilo koje dve uzajamno normalne ose koje leže u ravni figure i prolaze kroz nepomičnu tačku O, ima konstantnu vrednost.

3662*. Dokazati da momenat inercije ravne figure u odnosu na bilo koju osu ima vrednost Md^2+I_c, pri čemu je M—masa koja pokriva figuru, d—rastojanje između ose i težišta figure, a I_c je momenat inercije u odnosu na osu koja je paralelna sa uočenom osom i prolazi kroz težište figure (Štajnerov zakon).

U zadacima 3663 — 3665 naći statičke momente datih homogenih tela (gustina $\gamma=1$).

3663. Pravouglog paralelepipeda čije su ivice a, b i c — u odnosu na njegove (granične površine).

3664. Pravog kružnog konusa (poluprečnik osnove je R, a visina H) u odnosu na ravan koja prolazi kroz teme i paralelna je osnovi konusa.

3665. Tela ograničenog elipsoidom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i ravni Oyx, u odnosu na tu ravan.

U zadacima 3666 — 3672 naći težišta homogenih tela ograničenih datim površinama.

3666. Ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=4$ i $x+y+z=8$ (koso zasečeni paralelepiped).

3667. Elipsoidom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i koordinatnim ravnima (misli se na deo elipsoida koji leži u prvom oktantu).

3668. Cilindrom $z=\frac{y^2}{2}$ i ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $2x+3y-12=0$.

3669. Cilindrima $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ i ravnima $z=0$ i $x+z=0$.

3670. Paraboloidom $z=\frac{x^2+y^2}{2a}$ i sferom $x^2+y^2+z^2=3a^2$ $(z>0)$.

3671. Sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$ i konusom $z\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{x^2+y^2}$ (loptin isečak).

3672. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$.

U zadacima 3673 — 3675 naći težište datih homogenih površina.

3673. Dela sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$ koji se nalazi u prvom oktantu.

3674. Dela paraboloida $x^2+y^2=2z$, odsečenog ravni $z=1$.

U zadacima 3675 — 3680 naći momente inercije datih homogenih tela čija je masa M.

3675. Pravouglog paralelepipeda čije su ivice a, b i c — u odnosu na svaku od ivica i u odnosu na težište.

3676. Lopte u odnosu na tangentu.

3677. Elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ u odnosu na svaku od njegove tri ose.

3678. Pravog kružnog cilindra (poluprečnik osnove je R, a visina H) u odnosu na prečnik osnove i u odnosu na prečnik njegovog srednjeg poprečnog preseka.

3679. Šuplje lopte čiji je spoljnji poluprečnik R, a unutarnji r, — u odnosu na prečnik.

3680. Obrtnog paraboloida (poluprečnik osnove je R, a visina je H) u odnosu na osu koja prolazi kroz njegovo težište i normalna je na osu obrtanja (tzv. ekvatorijalni momenat).

U zadacima 3681 — 3683 izračunati momente inercije naznačenih delova datih homogenih površi (masa svakog od njih je M).

3681. Cilindričnog omotača (poluprečnik osnove cilindra je R, a visina je H) u odnosu na osu koja prolazi kroz težište cilindra i normalna je na osu cilindra.

3682. Dela paraboloida $x^2+y^2=2cz$ koji odseca ravan $z=c$,—u odnosu na z-osu.

3683. Omotača zarubljenog konusa (poluprečnici osnova su R i r, a visina je H),—u odnosu na njegovu osu.

Razni zadaci

3684. Naći masu kvadratne pločice čija je stranica $2a$, ako je gustina materijala od koga je pločica napravljena proporcionalna kvadratu odstojanja dotične tačke od tačke preseka dijagonala, a u temenima kvadrata gustina je jednaka jedinici.

3685. Ravan prsten ograničen je sa dva koncentrična kruga čiji su poluprečnici R i r ($R>r$). Naći masu prstena ako je gustina materijala obrnuto proporcionalna odstojanju dotične tačke od zajedničkog centra krugova a gustina u tačkama unutarnjeg kruga jednaka je jedinici.

3686. Oblast ograničena elipsom čije su poluose a i b, prekrivena je masom čija je gustina proporcionalna odstojanju dotične tačke od velike ose, a na jediničnom odstojanju od ove ose vrednost gustine je γ; naći ukupnu masu koja pokriva pomenutu oblast.

3687. Telo je ograničeno sa dve koncentrične sfere čiji su poluprečnici R i r ($R>r$); naći ukupnu masu tela ako je gustina materijala obrnuto proporcionalna odstojanju uočene tačke od zajedničkog centra, a na jediničnom odstojanju vrednost gustine je γ.

3688. Izračunati masu tela ograničenog pravim kružnim cilindrom poluprečnika R i visine H, ako je njegova gustina u proizvoljnoj tački brojno jednaka kvadratu odstojanja te tačke od centra osnove cilindra.

3689*. Izračunati masu tela ograničenog kružnim konusom čija visina je h, a ugao između ose i izvodnice α, ako mu je gustina proporcionalna n-tom stepenu odstojanja dotične tačke od ravni koja prolazi kroz teme konusa i paralelna je njegovoj osnovi, a na jediničnom odstojanju od pomenute ravni vrednost gustine je γ ($n>0$).

3690. Naći masu lopte poluprečnika R, ako joj je gustina proporcionalna trećem stepenu odstojanja uočene tačke od centra lopte, a na jediničnom odstojanju vrednost gustine je γ.

3691. Izračunati masu tela ograničenog paraboloidom $x^2+y^2=2az$ i sferom $x^2+y^2+z^2=3a^2$ ($z>0$), ako je gustina u svakoj tački brojno jednaka zbiru kvadrata kordinata te tačke.

3692*. Gustina masivne kugle $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ u bilo kojoj njenoj tački brojno je jednaka kvadratu odstojanja te tačke od koordinatnog početka; naći koordinate težišta kugle.

3693*. Naći statički momenat tela koje predstavlja zajednički deo lopti $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ i $x^2+y^2+z^2<2Rz$ u odnosu na ravan Oxy, ako je gustina u bilo kojoj tački tela brojno jednaka odstojanju te tačke od ravni Oxy.

3694*. Dokazati da momenat inercije tela na bilo koju osu ima vrednost Md^2+I_c, pri čemu je M—masa tela, d—rastojanje od ose do težišta tela, a I_c—momenat inercije u odnosu na osu koja je paralelna sa ucčenom osom i prolazi kroz težište tela (Štajnerov zakon, uporedi sa zad. 3662).

Polazeći od Njutnovog zakona univerzalne gravitacije rešiti zadatke 3695 — 3698.

3695. Izračunati silu kojom masivna homogena kugla poluprečnika R i gustine γ, privlači materijalnu tačku mase m koja se nalazi na odstojanju a ($a>R$) od centra kugle; uveriti se da bi sila uzajamnog privlačenja bila isto tolika i kad bi sva masa kugle bila koncentrisana u njenom centru.

3696*. Dokazati da Njutnova gravitaciona sila koja dejstvuje između dve homogene masivne kugle ima istu vrednost kao i kad bi masa svake kugle bila skoncentrisana u njenom centru.

3697. Izračunati silu kojom nehomogena masivna kugla $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, čija je gustina $\gamma=\lambda z^2$, dejstvuje na materijalnu tačku mase m, koja leži na z-osi na odstojanju $2R$ od centra kugle.

3698. Dokazati da je sila kojom homogeno telo, ograničeno sa dve koncentrične sfere (šuplja kugla debljine $R-r$), privlači materijalnu tačku koja se nalazi u unutarnjoj šupljini tela, jednaka nuli.

Centrom pritiska naziva se tačka u kojoj dejstvuje rezultanta svih pritisaka na datu ravnu figuru (sve sile pritiska su normalne na ravan figure). Pri određivanju koordinata centra pritiska polazi se od toga da je statički moment rezultujuće sile (tj. pritiska na svu površinu) u odnosu na bilo koju osu jednak zbiru statičkih momenata komponentnih sila u odnosu na tu osu. Polazeći od toga rešiti zadatke 3699 — 3701.

3699. Naći centar pritiska pravougaonika sa stranicama a i b ($a>b$), čija veća stranica leži na slobodnoj površini tečnosti, a njegova je ravan normalna na tu površinu. Pokazati da se položaj centra pritiska neće promeniti ako se ravan pravougaonika iskosi tako da sa površinom tečnosti zaklapa ugao α ($\alpha \neq 0$). Kako će se promeniti prethodni rezultati ako veća stranica leži ne na površini tečnosti, već na dubini h (ostajući i dalje paralelna površini)?

3700. Trougao visine h leži u ravni koja sa slobodnom površinom tečnosti obrazuje ugao α. Na kojoj dubini leži centar pritiska ovog trougla ako:

a) osnovica trougla leži na površini tečnosti?

b) teme leži na površini, a osnovica je paralelna sa njom?

3701. Naći centar pritiska figure ograničene elipsom čije su poluose a i b ($a>b$), ako je veća osa normalna na površinu tečnosti, a gornji kraj ove ose leži na rastojanju h od površine.

3702*. Dokazati da je pritisak tečnosti na ravnu pločicu zagnjurenu bilo kako u tečnost, jednak težini cilindričnog stuba te tečnosti koji bi se našao iznad pomenute pločice kad bi ona ležala horizontalno, na onoj dubini ispod nivoa tečnosti na kojoj leži njeno težište.

§ 5. Nesvojstveni integrali. Integrali koji zavise od parametra

Nesvojstveni dvojni i trojni integrali

U zadacima 3703 — 3711 izračunati vrednost svakog od datih nesvojstvenih integrala, ili pokazati da integral divergira.

3703. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$,

3704. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

3705. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$,

3706. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy$.

3707. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}(x+y)\,e^{-(x+y)}\,dx\,dy$

3708. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}xye^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$.

3709*. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\,dx\,dy$.

3710*. $\int\limits_{0}^{\infty}dx\int\limits_{x}^{\infty}e^{-y^2}\,dy$.

3711*. $\int\limits_{0}^{\infty}dx\int\limits_{2x}^{\infty}xe^{-y}\frac{\sin y}{y^2}\,dy$.

U zadacima 3712 — 3715 utvrditi koji su od datih nesvojstvenih integrala, uzetih po krugu poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku, konvergentni.

3712. $\iint\limits_{D}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3713. $\iint\limits_{D}\frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3714. $\iint\limits_{D}\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy$.

3715. $\iint\limits_{D}\frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3716. Može li se broj m izabrati tako da bi nesvojstveni integral $\iint\frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^m}}$, uzet po svoj ravni Oxy, bio konvergentan?

U zadacima 3717 — 3719 izračunati vrednosti datih nesvojstvenih integrala.

3717. $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}$. **3718.** $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}$.

3719*. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz.$

U zadacima 3720 — 3722 utvrditi da li su konvergentni dati nesvojstven integrali, uzeti po prostornoj oblasti ograničenoj sferom poluprečnika R, s centrom u koordinatnom početku.

3720. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$.

3721. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$

3722. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dx\,dy\,dz.$

3723. Izračunati integral $\iiint\limits_{\Omega} \ln(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, u kojem je Ω prostorna oblast ograničena sferom poluprečnika R, sa centrom u koordinatnom početku.

3724*. Izračunati zapreminu tela ograničenog površinom $z=(x^2+y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$ i ravni $z=0$.

3725. Izračunati zapreminu tela ograničenog površinom $z=x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}$ i ravni $z=0$.

3726. Izračunati zapreminu tela ograničenog ravni $z=0$ i onim delom površine $z=x\cdot e^{-(x^2+y^2)}$ koji leži iznad te ravni.

3727. Dato je homogeno telo ograničeno pravim kružnim cilindrom (poluprečnik osnove je R, visina je H, a gustina je γ); izračunati silu privlačenja kojom ovo telo dejstvuje na masu m, postavljenu u centar osnove cilindra.

3728. Dato je homogeno telo ograničeno pravim kružnim konusom (poluprečnik osnove je R, visina je H, a gustina je γ); izračunati silu privlačenja kojom ovo telo dejstvuje na masu m postavljenu u vrh konusa.

3729. Data je nehomogena masivna kugla poluprečnika R, čija je gustina γ u bilo kojoj tački zadata obrascem: $\gamma=a-br$, u kojem je r odstojanje dotične tačke od centra kugle, a a i b su pozitivne konstante.

a) Odrediti vrednost konstanata a i b ako se zna da srednja gustina kugle ima vrednost γ_c, a gustina na površini kugle je γ_0.

b) Izračunati silu privlačenja kojom kugla dejstvuje na materijalnu tačku mase m, koja se nalazi na površini kugle.

Integrali koji zavise od parametra. Lajbnicovo pravilo

3730. Naći oblast definisanosti funkcije $f(x)=\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x^2+z^2}}$.

3731. Naći krivinu krive $y=\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha$ u tački čija je apscisa $x=1$.

3732. Polazeći od jednakosti $\int_0^b \frac{dx}{1+ax}=\frac{1}{a}\ln(1+ab)$ izvesti diferenciranjem po parametru, sledeću formulu:

$$\int_0^b \frac{x\,dx}{(1+ax)^2}=\frac{1}{a^2}\ln(1+ab)-\frac{b}{a(1+ab)}.$$

3733. Polazeći od jednakosti $\int_0^b \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, izračunati integral $\int_0^b \frac{dx}{(x^2+y^2)^3}$.

3734. Polazeći od jednakosti $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2a}$. izračunati $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ (n je ceo pozitivan broj).

3735. Izračunati vrednost integrala $\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}\,dx$ (n je ceo pozitivan broj) za $a>0$, našavši prethodno vrednost $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$.

3736*. Polazeći od jednakosti (vidi zad. 2318)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2|ab|},\quad \text{naći} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}.$$

U zadacima 3737 — 3749 izračunati vrednosti datih integrala metodom diferenciránja po parametru.

3737. $\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,dx \quad (a>-1).$

3738. $\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx \quad (a>-1).$

3739. $\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

3740. $\int_0^{1} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (a^2<1).$

3741. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx.$

3742. $\int_0^{1} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (a^2<1).$

3743. $\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx \quad (a^2<1).$

3744. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\right)\frac{dx}{\sin x} \quad (a^2<1).$

3745. $\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\,dx \quad (a>0)$, znajući da je

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0) \text{ (vidi zadatak 2439).}$$

3746*. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$

3747*. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\sin bx-\sin cx}{x}\,dx \quad (a>0).$

3748. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\cos bx-\cos cx}{x}\,dx \quad (a>0).$

3749*. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)\,dx.$

3750. Izračunavši integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx$, naći $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$.

3751. Koristeći jednakost $\int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, izračunati integral

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,dx \quad (\alpha > -1,\ \beta > -1).$$

3752. Koristeći jednakost $2a\int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (vidi zadatak 2439), izračunati integral $\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$.

3753. Iz relacije $\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Puasonov integral) izvesti jednakost

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-z^2x}\,dz\ (x > 0$$

i iskoristiti je za izračunavanje integrala (integral difrakcije ili Frenelov integral):

$$\text{a)}\ \int\limits_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}; \qquad \text{b)}\ \int\limits_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}.$$

Razni zadaci

3754. Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna za $x \geqslant 0$, i neka teži određenoj graničnoj vrednosti $f(\infty)$ kad $x \to \infty$; neka, uz to, integral $\int\limits_0^\infty f'(\alpha x)\,dx$ uniformno konvergira za $0 < a \leqslant \alpha < b$. Dokazati da je pod navedenim uslovima

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = [f(\infty) - f(0)] \ln \frac{a}{b}.$$

U zadacima 3755 — 3756 izračunati vrednosti datih integrala koristeći rezultat zadatka 3754.

3755. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$. **3756.** $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x}\,dx\ (n > 0)$.

3757*. Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna za $x \geqslant 0$ i neka integral $\int\limits_{A}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ konvergira za svaku vrednost $A > 0$; dokazati da je pod ovim uslovima, za $a > 0$ i $b > 0$: $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$. (uporedi sa zad. 3754).

U zadacima 3758 — 3762 izračunati date integrale, koristeći se rezultatom zadatka 3757 ($a > 0$, $b > 0$).

3758. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, ax.$ **3759.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx.$

3760. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin ax \cdot \sin bx}{x}\, dx.$

3761. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2}\, dx.$ **3762*.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx.$

3763*. Laplasova funkcija $\Phi(x)$ definiše se ovako: $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt$ (ova funkcija igra veliku ulogu u teoriji verovatnoće). Dokazati relacije:

1) $\int\limits_{0}^{x} \Phi(az)\, dz = \frac{e^{-a^2x^2} - 1}{a\sqrt{\pi}} + x\Phi(ax);$

2) $\int\limits_{0}^{\infty} [1 - \Phi(x)]\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$

3764*. Funkcije $\operatorname{si}(x)$ i $\operatorname{ci}(x)$ obično se definišu ovako:

$$\operatorname{si}(x) = -\int\limits_{x}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \qquad \text{(tzv. integralni sinus)}$$

$$\operatorname{ci}(x) = -\int\limits_{x}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt. \qquad \text{(tzv. integralni kosinus).}$$

Dokazati da je

$$\int\limits_{0}^{\infty} \sin x \operatorname{si}(x)\, dx = \int\limits_{0}^{\infty} \cos x \operatorname{ci}(x)\, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

3765*. Funkcija $J_0(x)$ definisana ovako:

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta,$$

naziva se Beselovom funkcijom nultog reda. Dokazati da je

$$1)\ \int_0^{\infty}e^{-ax}J_0(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\quad(a>0);$$

$$2)\ \int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}J_0(x)\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{ako je } a\geqslant 1;\\ \arcsin a, & \text{ako je } |a|\leqslant 1;\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ako je } a\leqslant -1.\end{cases}$$

3766. Dokazati da funkcija $y=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xz}}{1+z^2}dz$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$y''+y=\frac{1}{x}.$$

3767*. Dokazati da funkcija $y=\int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n-1}e^{xz}\,dz$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$xy''+2ny'-xy=0.$$

3768*. Dokazati da funkcija

$$y=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xz}}{(1+z^2)^{n+1}}dz$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$xy''-2ny'+xy=1.$$

3769*. Dokazati da Beselova funkcija nultog reda

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$J_0''(x)+\frac{J_0'(x)}{x}+J_0(x)=0.$$

REZULTATI

3460. $M=\iint\limits_D \gamma(x, y)\,d\sigma.$ **3461.** $E=\iint\limits_D \sigma(x, y)\,d\sigma.$

3462. $T=\frac{1}{2}\omega^2\iint\limits_D y^2\gamma(x, y)\,d\sigma.$

3463. $Q=(t_2-t_1)\iint\limits_D c(x,y)\gamma(x,y)\,d\sigma.$

3464. $M=\iiint\limits_\Omega \gamma(x,y,z)\,dv.$ **3465.** $E=\iiint\limits_\Omega \delta(x,y,z)\,dv.$

3466. $8\pi(45-\sqrt{2})<I<8\pi(5+\sqrt{2}).$ **3467.** $36\pi<I<100\pi.$

3468. $2<I<8.$ **3469.** $-8<I<\frac{2}{3}.$ **2470.** $0<I<64.$

3471. $4<I<36.$ **3472.** $4<I<8(5-2\sqrt{2}).$ $4\pi<I<22\pi.$

3474. $0<I<\frac{4}{3}\pi R^5.$ **3475.** $24<I<72.$

3476. $29\pi\sqrt{3}<I<52\pi\sqrt{3}.$ **3477.** 1. **3478.** $(e-1)^2.$ **3479.** $\frac{\pi}{12}.$

3480. $\ln\frac{4}{3}.$ **3481.** $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$ **3482.** $\pi-2.$ **3483.** 2. **3484.** $-\frac{\pi}{16}.$

3485. $\int\limits_3^5 dx\int\limits_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x,y)\,dy.$ **3486.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$

3487. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$ **3488.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy.$

3489. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx\int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy.$ **3490.** $\int\limits_{-2}^{2} dx\int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$

3491. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy.$ **3492.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$

3493. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{2x} f(x,y)\,dy+\int\limits_2^3 dx\int\limits_x^{6-x} f(x,y)\,dy.$

3494. $\int\limits_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} dx\int\limits_{1-2x}^{x+3} f(x,y)\,dy+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dx\int\limits_x^{x+3} f(x,y)\,dy+\int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} dx\int\limits_x^{5-2x} f(x,y)\,dy.$

3495. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x,y)\,dy.$

3496. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2x} f(x, y)\,dy + \int\limits_2^{\frac{9}{2}} dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\frac{9}{2}}^{8} dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{24-4x} f(x, y)\,dy.$

3497. $\int\limits_{-3}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy.$

3498. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x, y)\,dy.$ **3499.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3500. $\int\limits_0^r dy \int\limits_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x, y)\,dx.$ **3501.** $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x, y)\,dx.$

3502. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^y f(x, y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x, y)\,dx.$

3503. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x, y)\,dx.$

3504. 1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x, y)\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)\,dx$;

3) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3505. 1) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{2y-3}^{\frac{y+6}{2}} f(x, y)\,dx$;

2) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y+1}{2}}^{\frac{9-y}{2}} f(x, y)\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^{3} dx \int\limits_0^{1+\sqrt{3+2x-x^2}} f(x, y)\,dy$;

4) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3506. 1) $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$; 2) 9; 3) $\frac{1}{2}$. **3507.** 0. **3508.** $\frac{33}{140}$. **3509.** $\frac{9}{4}$.

3510. -2. 3511. $\frac{\pi}{6}$. 3512. $\frac{4}{135}$. 3513. 4. 3514. 3. 3515. $12\frac{2}{3}$.

3516. $\frac{2}{3}R$. 3517. 6. 3518. $\frac{abc(a+b+c)}{2}$. 3519. $\frac{a^6}{48}$. 3520. $\frac{a^{11}}{110}$.

3521. $2e-5$. 3522. $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$. 3523. $\frac{1}{180}$. 3524. $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

3525. 1) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{0} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\rho)\,\rho\,d\rho$;

3) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

3526. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

3527. $\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho + \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

3528. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sec\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

3529. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\sqrt{2}\sec\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}^{2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

3530. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

3531. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sin 2\varphi} f(\rho\cos\varphi),\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

3532. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

3533. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{R}{2\sin\varphi}}^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3534. $\frac{\pi}{2}\int\limits_0^R f(\rho^2)\,\rho\,\rho d.$ 3535. $\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\operatorname{arctg} R} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi.$

3536. $\frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2].$ 3537. $\frac{\pi(\pi-2)}{8}.$ 3538. $\pi R^2 h.$

3539. $\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$ 3540. $\frac{\pi^2}{6}.$

3542. $x=2\rho\cos\varphi,\ y=3\rho\sin\varphi;\ I=6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 f(2\rho\cos\varphi,\ 3\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3543. $x=\rho\cos\varphi,\ y=\sqrt{3}\,\rho\sin\varphi;$

$$I=\sqrt{3}\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \sqrt{3}\,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

3544. $x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi;\ I=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_1^2 f(\sqrt{4-\rho^2})\,\rho\,d\rho.$

3545. $\frac{a^2b^2}{8}.$ 3546. $\frac{1}{\frac{4}{\sqrt{6}}}.$

3547. $\int\limits_0^1 dz\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,\rho\,d\rho.$

3548. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho\,d\rho\int\limits_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,dz.$

3549. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\,d\rho.$

3550. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho\,d\rho\int\limits_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,dz.$

3551. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \rho\, d\rho \int\limits_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\, dz$ ili

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\, d\rho +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\, d\rho.$$

3552. $\frac{\pi a}{2}$. **3553.** $\frac{8}{9}a^2$. **3554.** $\frac{4}{15}\pi R^5$. **3555.** $\frac{\pi}{8}$.

3556. $\frac{4}{25}\pi(R^5-r^5)$. **3557.** $\frac{2\pi}{3}$.

3558. $\pi\left[3\sqrt{10}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{2}-8\right]$.

3559. $186\frac{2}{3}$. **3560.** $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$. **3561.** $\frac{abc}{6}$. **3562.** 12.

3563. $\frac{1}{6}$. **3564.** $78\frac{15}{32}$. **3565.** $\frac{48}{5}\sqrt{6}$. **3566.** 16. **3567.** 45.

3568. $13\frac{1}{3}$. **3569.** $16\frac{1}{5}$. **3570.** $ar^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$. **3571.** 22π.

3572. $\frac{16}{3}R^3$. **3573.** $12\frac{4}{21}$. **3574.** $\frac{4R^5}{15a^2}$. **3575.** 27. **3576.** $\frac{3}{8}$.

3577. $\frac{88}{105}$. **3578.** $\frac{1}{3}abc$. **3579.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **3580.** $2\left(e^2-\frac{2e^3+1}{9}\right)$.

3581. $3e-8$. **3582*.** $4e-e^2-1$. Telo je simetrično u odnosu na ravan $y=x$.

3583. $2\left(\pi^2-\frac{35}{9}\right)$. **3584.** $\frac{1}{45}$. **3585.** $\frac{16}{9}$. **3586.** $\frac{\pi}{4}$.

3587. 40π. **3588.** 2π. **3589.** $\frac{5}{2}\pi R^3$. **3590.** $\frac{3}{2}\pi a^3$.

3591. $\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$. **3592.** $\frac{a^3}{24}$. **3593.** $\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right)$.

3594. $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **3595.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{24}$. **3596.** $\frac{\pi^2R^2h}{16}$. **3597.** $\frac{1}{2}$.

3598. 2. **3599.** πab. **3600.** $\frac{ab}{6}$. **3601.** $\frac{16}{3}$.

3602*. $\frac{5}{8}\pi a^2$; preći na polarne koordinate. **3603.** $\frac{3}{4}\pi$.

3604. $2a^9$. **3605.** $\frac{2}{3}$. **3606.** $\frac{1}{60}$. **3607.** $\frac{1}{1260}$.

3608*. 1) $\frac{a^2b^2}{2c^2}$; 2) $\frac{39}{25}\pi$; iskoristiti tvrđenje formulisano u zad. 3541. **3609.** 8.

3610. $\frac{7}{12}$. **3611.** $\frac{3}{35}$. **3612.** $4(4-3\ln 3)$.

3613*. $\frac{\pi}{2}$. Projekcija tela na ravan xOy je krug.

3614. $\frac{\pi}{8}$. Preneti koordinatni početak u tačku $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

3615*. $\frac{19}{6}\pi$ i $\frac{15}{2}\pi$. Preći na cilindrične koordinate.

3616. $\frac{5}{12}\pi R^3$. **3617.** $\frac{\pi}{96}$. **3618.** $\frac{92}{75}\pi R^2$.

3619*. $\frac{1}{3}\pi a^3$. Preći na sferne koordinate. **3620.** $\frac{a^3}{360}$. **3621.** $\frac{4}{21}\pi a^3$.

3622. $\frac{4}{3}\pi a^3$. **3623.** $\frac{64}{105}\pi a^3$. **3624.** $\frac{\pi^2 a^3}{6}$.

3625. $\frac{21(2-\sqrt{2})}{4}\pi$. **3626.** 14. **3627.** 36. **3628.** 8π. **3269.** $2\sqrt{2}\pi p^2$

3630*. $2\pi R^2$. Projicirati površinu na ravan Oyz.

3631. $8\sqrt{2}ab$. **3632.** $\frac{16}{3}(\sqrt{8}-1)$. **3633.** $\frac{2\pi}{3}\{(1+R^2)^{\frac{3}{2}}-1\}$.

3634. $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$. **3635.** $4\pi a(a-\sqrt{a^2-R^2})$.

3636. $2R^2(\pi-2)$. **3637.** $2R^2(\pi+4-4\sqrt{2})$.

3638. $\frac{\pi}{4}\{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2+\sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\}$. **3639.** $\frac{2a^2}{\sin 2\alpha}$.

3640*. $\frac{\pi R^2}{12}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\approx 3{,}42\cdot 10^8\ km^2$. Preći na sferne koordinate.

3641. $\frac{16}{3}\pi a^2$. **3642.** $8R^2$. **3643.** $\frac{ab^2}{2}$. **3644.** $\frac{2}{3}R^3$.

3645. πR^3. **3646.** $\frac{9}{4}a^3$. **3647.** Statički momenat ima vrednost $\frac{ah^2}{6}$.

3648. Težište leži na maloj osi, na odstojanju $\frac{4b}{3\pi}$ od velike ose (b je mala poluosa)

3649. $\xi=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1),\ \eta=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(2+\sqrt{2}).$

3650. Težište leži na simetrali ugla α, na rastojanju $\frac{4}{3}R\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ od centra kruga.

3651. Težište leži na simetrali ugla α, na rastojanju $\frac{4}{3}R\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}$ od centra kruga.

3652. $\xi=\frac{3\pi}{16},\ \ \eta=0.$ **3653.** $\frac{5}{4}\pi R^4.$

3654. $\frac{2}{3}a^4.$ **3655.** $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2).$

3656. $\frac{ab(a^2+b^2)}{12}.$ **3657.** $\frac{ah}{48}(a^2+12h^2).$ **3658.** $\frac{3\pi R^4}{2}.$

3659. $ah\left(\frac{2h^2}{7}+\frac{a^2}{30}\right).$

3662*. Postaviti koordinatni sistem tako da se koordioatni početak poklapa sa težištem figure, a da jedna od koordinatnih osa bude paralelna osi u odnosu na koju se traži momenat inercije.

3663. $\frac{a^2bc}{2},\ \frac{ab^2c}{2}$ i $\frac{abc^2}{2}.$ **3664.** $\frac{\pi R^2H^2}{4}.$ **3665.** $\frac{\pi abc^2}{4}.$

3666. $\xi=\frac{14}{15},\ \eta=\frac{26}{15},\ \zeta=\frac{8}{3}.$ **3667.** $\xi=\frac{3}{8}a,\ \eta=\frac{3}{8}b,\ \zeta=\frac{3}{8}c.$

3668. $\xi=\frac{6}{5},\ \eta=\frac{12}{5},\ \zeta=\frac{8}{5}.$ **3669.** $\xi=\frac{18}{7},\ \eta=\frac{15}{16}\sqrt{6},\ \zeta=\frac{12}{7}.$

3670. $\xi=0,\ \ \eta=0,\ \ \zeta=\frac{5a}{83}(6\sqrt{3}+5).$

3671. $\xi=0,\ \ \eta=0,\ \ \zeta=\frac{3R}{8}(1+\cos\alpha).$ **3672.** $\xi=0,\ \ \eta=0,\ \ \zeta=\frac{9a}{20}.$

3673. $\xi=\frac{R}{2},\ \eta=\frac{R}{2},\ \zeta=\frac{R}{2}.$ **3674.** $\xi=0,\ \ \eta=0,\ \ \zeta=\frac{55+9\sqrt{3}}{130}.$

3675. $\frac{1}{3}M(b^2+c^2),\ \frac{1}{3}M(c^2+a^2),\ \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$ i $\frac{1}{12}M(a^2+b^2+c^2).$

3676. $\frac{7}{5}MR^2.$ **3677.** $\frac{1}{5}M(b^2+c^2),\ \frac{1}{5}M(c^2+a^2),\ \frac{1}{5}M(a^2+b^2).$

3678. $M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{3}\right)$ i $\frac{M}{12}(H^2+3R^2).$ **3679.** $\frac{2}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}.$

3680. $\frac{1}{36}\pi R^2H(3R^2+H^2.$ **3681.** $\frac{1}{2}M\left(R^2+\frac{1}{6}H^2\right).$

3682. $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}Mc^2$. **3683.** $\frac{1}{2}\pi l\frac{R^4-r^4}{R-r}$, gde je l izvodnica konusa.

3684. $\frac{4}{3}a^2$. **3685.** $2\pi r(R-r)$. **3686.** $\frac{4}{3}\gamma ab^2$. **3687.** $2\pi\gamma(R^2-r^2)$.

3688. $\frac{\pi R^2 H}{6}(3R^2+2H^2)$.

3689. $\frac{\pi\gamma h^{n+3}\operatorname{tg}^2\alpha}{n+3}$. Ako vrh konusa uzmemo za koordinatni početak a osu konusa za z-osu, onda će jednačina konusa biti $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\alpha=0$.

3690. $\frac{2}{3}\pi\gamma R^6$. **3691.** $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$.

3692*. $\xi=0$, $\eta=0$, $\xi=\frac{5}{4}R$. Preći na cilindrične koordinate.

3693*. $\frac{59}{480}\pi R^5$. Vidi uputstvo uz prethodni zadatak.

3694*. Izabrati koordinatni sistem tako da se koordinatni početak poklapa sa težištem tela, a da jedna od koordinatnih osa bude paralelna osi u odnosu na koju se traži momenat inercije.

3695. $\frac{kMm}{a^2}$, pri čemu je M masa kugle, a k — gravitaciona konstanta.

3696*. Iskoristiti rezultat predhodnog zadatka.

3697. $\frac{17}{56}\frac{kM}{R^2}$, gde je k gravitaciona konstanta.

3699. Centar pritiska leži na osi simetrije pravougaonika, normalnoj na stranici a, na odstojanju $\frac{2}{3}b$ od stranice koja leži na površini tečnosti. U drugom slučaju (kad stranica a leži na dubini h) odstojanje centra pritiska od gornje granice iznosi $\frac{2b}{3}\cdot\frac{b+\frac{3}{2}l}{b+2l}$, pri čemu je $l=\frac{h}{\sin\alpha}$ (Ako je vrednost b mala u odnosu na l ($l\gg b$) onda se centar pritiska skoro poklapa sa centrom pravougaonika).

3700. a) $\frac{h}{2}\sin\alpha$; b) $\frac{3}{4}h\sin\alpha$.

3701. Centar pritiska leži na velikoj osi elipse, na odstojanju $a+\frac{a^2}{4(a+h)}$ od njenog gornjeg kraja.

3702*. Postaviti koordinatni sistem tako da se jedna od koordinatnih ravni poklapa sa ravni pločice, a jedna od koordinatnih osa — sa pravom po kojoj ravan pločice seče površinu tečnosti.

3703. Divergira. **3704.** 2π. **3705.** $\frac{\pi}{4a^2}$. **3706.** 4. **3707.** 2. **3708.** $\frac{1}{4}$.

3709*. $\frac{\alpha}{2\sin\alpha}$. Preći na polarne koordinate.

3710*. $\frac{1}{2}$. Promeniti redosled integracije.

3711. $\frac{1}{16}$. Vidi uputstvo uz prethodni zadatak. **3712.** Konvergira.

3713. Divergira. **3714.** Konvergira. **3715.** Divergira.

3716. Nije. **3717.** $\frac{8}{15}$. **3718.** $\frac{\pi}{16}$.

3719*. $\pi\sqrt{\ }$[illegible] iskoristiti Puasonov integral $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **3720.** Divergira.

3721. Konvergira. **3722.** Divergira. **3723.** $\frac{8}{3}\pi R^3\left(\ln R-\frac{1}{3}\right)$.

3724*. π. (Vidi uputstvo iz zadatak 3719). **3725.** $\frac{\pi}{4}$. **3726.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3727. $2\pi km\gamma\left(R+H-\sqrt{R^2+H^2}\right)$. Pravac sile se poklapa sa osom cilindra, k je gravitaciona konstanta.

3728. $\frac{2\pi km\gamma H}{l}(l-H)$, pri čemu je l izvodnica konusa. Pravac sile se poklapa sa osom konusa.

3729. a) $a=4\gamma_c-3\gamma_0$, $b=\frac{4}{R}(\gamma_c-\gamma_0)$; b) $\frac{4}{3}\pi kR\gamma_c=\frac{kMm}{R^2}$.

3730. Definisana je za sve vrednosti $x\neq 0$. **3731.** 3π.

3733. $\frac{b}{8a^4}\left\{\frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{3}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right\}$. **3734.** $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\,\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$ $(n>1)$.

3735. $\frac{(n-1)!}{a^n}$. **3736***. $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4\,|ab|^3}$. Diferencirati po a ili b i sabrati rezultate.

3737. $\ln(1+a)$. **3738.** $\frac{1}{2}\ln(1+a)$. **3739.** $\frac{\pi}{2}\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)$.

3740. $\pi\left(\sqrt{1-a^2}-1\right)$. **3741.** $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$, ako je $a>0$; $-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$, ako je $a<0$.

3742. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$. **3743.** $\pi\arcsin a$. **3744.** $\pi\arcsin a$. **3745.** $\sqrt{\pi a}$.

3746*. $\sqrt{\pi}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)$. Naći izvode po a ili po b.

3747*. $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}-\operatorname{arctg}\frac{c}{a}=\operatorname{arctg}\frac{a(b-c)}{a^2+bc}$. Diferencirati po b ili po c.

3748. $\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$. **3749***. $\pi\ln\frac{a+b}{2}$. Diferencirati po a ili po b.

3750. $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$, ako je $a>0$; $-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$, ako je $a<0$; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg}x}dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

3751*. $\ln\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$. Integrirati po parametru n u granicama od α do β.

3752. $\sqrt{\pi}\,(b-a)$. **3753.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3755. $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{a}{b}$. **3756.** $\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{b}{a}$.

3757*. $$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\varepsilon^\infty \frac{f(bx)}{x}\,dx\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Ocenjujemo poslednji integral zamenjujući funkciju $f(x)$ njenom najvećom i najmanjom vrednošću u intervalu $(a\varepsilon,\ b\varepsilon)$, i prelazimo na graničnu vrednost.

3758. $\ln\dfrac{b}{a}$ **3759.** $\ln\dfrac{b}{a}$, **3760.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|$. **3761.** $ab\ln\dfrac{b}{a}$.

3762*. $\dfrac{3}{4}\ln 3$. Izrazimo li $\sin^3 x$ pomoću trigonometriskih funkcija višestrukih uglova zadatak se svodi na predhodni (pri odgovarajućem izboru vrednosti a i b).

3763*. Dokaz se može izvesti na dva načina: 1) parcijalnom integracijom; 2) promenom redosleda integracije u dvojnom integralu koji se dobija kad se funkcija $\Phi(az)$ zameni integralom.

3764*. Vidi uputstvo uz zadatak 3763.

3765*. Primeniti drugi način rešavanja zadatka 3763. Pri dokazivanju druge relacije mora se ispitati integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\cos(x\sin\theta)}{x}\,dx$$

za $|a|>1$ i $|a|<1$. U su svrhu sreba transformisati izraz koji stoji u broiitelju, i uzeti u obzir da je $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (Dirihle-ov integral).

3767*. U levu stranu diferencijalne jednačine treba uvrstiti izraze y' i y'' koji se dobijaju diferenciranjem integrala y po parametru, i na jedan od tako dobijenih sabiraka primeniti parcijalnu integraciju.

3768*. Vidi uputstvo uz zadatak 3767.

3769*. Vidi uputstvo uz zadatak 3767.